練習問題 1-A

1.

（1）（変数分離形）

両辺を$1-x$で割ると

$$\frac{1}{1-x}\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$$

両辺をtについて積分すると

$$\int\frac{1}{1-x}dx=\int\frac{1}{t}dt$$

これより

$\log|1-x|=\log|t|+c$（cは任意定数）

$$-\log|1-x|-\log|t|=c$$

$$\log|1-x|+\log|t|=c$$

$$\log|(1-x)t|=c$$

$$(1-x)t=\pm e^c$$

$C=\pm e^c$とおくと

$$(1-x)t=C$$

$$1-x=\frac{C}{t}$$

よって，求める一般解は

$\boldsymbol{x=1-\frac{C}{t}}$　**（$\boldsymbol{C}$は任意定数）**

（2）（1階線形）

i）斉次1階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt}-2tx=0$$

$$\frac{dx}{dt}=2tx$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=2t$$

両辺をtについて積分すると

$$\int\frac{1}{x}dx=\int 2tdt$$

これより

$\log|x|=t^2+c$（cは任意定数）

$$x=\pm e^{t^2+c}$$

$$x=\pm e^c\cdot e^{t^2}$$

$C=\pm e^c$とおくと

$x=Ce^{t^2}$（Cは任意定数）

ii）$x=ue^{t^2}$とおき，両辺をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}e^{t^2}+ue^{t^2}\cdot(2t)$$

$$=\frac{du}{dt}e^{t^2}-2tue^{t^2}$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt}e^{t^2}-2tue^{t^2}-2tue^{t^2}=e^{t^2}$$

$$\frac{du}{dt}e^{t^2}=e^{t^2}$$

$$\frac{du}{dt}=1$$

両辺をtについて積分すると

$$\int du=\int dt$$

$u=t+C$（Cは任意定数）

よって，求める一般解は

$\boldsymbol{x=(t+C)e^{t^2}}$　**（$\boldsymbol{C}$は任意定数）**

（3）（同次形）

$\frac{dx}{dt}=\frac{t-x}{t}$より，$\frac{dx}{dt}=1-\frac{x}{t}$　・・・①

$u=\frac{x}{t}$とおくと，$x=tu$であるから，

両辺をtで微分して

$$\frac{dx}{dt}=u+t\frac{du}{dt}$$

これを①に代入して

$$u+t\frac{du}{dt}=1-u$$

$$t\frac{du}{dt}=1-2u$$

$$\frac{1}{1-2u}\frac{du}{dt}=\frac{1}{t}$$

両辺をtについて積分すると

$$\int\frac{1}{1-2u}du=\int\frac{1}{t}dt$$

これより

$$\frac{1}{-2}\cdot\log|1-2u|=\log|t|+c$$（cは任意定数）

$$\log|1-2u|=-2\log|t|-2c$$

$$\log|1-2u|+\log|t|^2=-2c$$

$$\log|t^2(1-2u)|=-2c$$

$$t^2(1-2u)=\pm e^{-2c}$$

$C=\pm e^{-2c}$とおくと

$$t^2(1-2u)=C$$

ここで，$u=\dfrac{x}{t}$であるから

$$t^2\left(1-2\cdot\frac{x}{t}\right)=C$$

$$t^2-2tx=C$$

$$2tx=t^2-C$$

$$x=\frac{t^2-C}{2t}$$

Cは任意定数であるから，求める一般解は

$$\boldsymbol{x=\frac{t^2+C}{2t}}$$ **（Cは任意定数）**

（４）（変数分離形）

$\dfrac{dx}{dt}-2tx=x$より，$\dfrac{dx}{dt}=(2t+1)x$

両辺をxで割ると

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=2t+1$$

両辺をtについて積分すると

$$\int\frac{1}{x}dx=\int(2t+1)dt$$

これより

$$\log|x|=t^2+t+c$$（cは任意定数）

$$x=\pm e^{t^2+t+c}$$

$$x=\pm e^{c}\cdot e^{t^2+t}$$

$C=\pm e^{-2c}$とおくと，求める一般解は

$$\boldsymbol{x=Ce^{t^2+t}}$$ **（Cは任意定数）**

（５）（１階線形）

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t^2-x}{t}$より，$\dfrac{dx}{dt}=t-\dfrac{x}{t}$

よって，$\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{x}{t}=t$・・・①

i）斉次１階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt}+\frac{x}{t}=0$$

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{x}{t}$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{t}$$

両辺をtについて積分すると

$$\int\frac{1}{x}dx=\int-\frac{1}{t}dt$$

これより

$$\log|x|=-\log|t|+c$$（cは任意定数）

$$\log|x|+\log|t|=c$$

$$\log|xt|=c$$

$$xt=\pm e^{c}$$

$C=\pm e^{c}$とおくと

$$xt=C$$

$$x=\frac{C}{t}$$（Cは任意定数）

ii）$x=\dfrac{u}{t}$とおき,両辺をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}\frac{1}{t}+u\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}\frac{du}{dt}-\frac{u}{t^2}$$

これを，①に代入すると

$$\frac{1}{t}\frac{du}{dt}-\frac{u}{t^2}+\frac{1}{t}\cdot\frac{u}{t}=t$$

$$\frac{1}{t}\frac{du}{dt}-\frac{u}{t^2}+\frac{u}{t^2}=t$$

$$\frac{du}{dt}=t^2$$

両辺をtについて積分すると

$$\int du=\int t^2dt$$

$$u=\frac{1}{3}t^3+C$$（Cは任意定数）

よって，求める一般解は

$$x=\frac{\frac{1}{3}t^3+C}{t}$$

$$\boldsymbol{x=\frac{t^2}{3}+\frac{C}{t}}$$ **（Cは任意定数）**

（６）（同次形）

$tx\dfrac{dx}{dt}=x^2-t^2$より，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x}{t}-\dfrac{t}{x}$

よって，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x}{t}-\dfrac{1}{\frac{x}{t}}$ ・・・①

$u=\dfrac{x}{t}$とおくと，$x=tu$であるから，

両辺をtで微分して

$$\frac{dx}{dt}=u+t\frac{du}{dt}$$

これを①に代入して

$$u+t\frac{du}{dt}=u-\frac{1}{u}$$

$$t\frac{du}{dt}=-\frac{1}{u}$$

$$u\frac{du}{dt}=-\frac{1}{t}$$

両辺をtについて積分すると

$$\int udu=-\int\frac{1}{t}dt$$

$\dfrac{1}{2}u^2=-\log|t|+C$（$C$は任意定数）

ここで，$u=\dfrac{x}{t}$であるから

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{t}\right)^2=-\log|t|+C$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{t^2}=-\log|t|+C$$

$\boldsymbol{x^2=2t^2(C-\log|t|)}$**（$C$は任意定数）**

2.

（１）（変数分離形）

両辺をx^2で割ると

$$\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt}=3t^2$$

両辺をtで積分すると

$$\int\frac{1}{x^2}dx=\int 3t^2dt$$

これより

$-\dfrac{1}{x}=t^3+C$（Cは任意定数）

よって，一般解は

$$x=-\frac{1}{t^3+C}$$

ここで，$t=0$，$x=1$を代入すると

$$1=-\frac{1}{0+C}$$

$$C=-1$$

よって，求める解は

$$\boldsymbol{x=-\frac{1}{t^3-1}=\frac{1}{1-t^3}}$$

（２）（変数分離形）

両辺を$\sqrt{1-x^2}$で割ると

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dx}{dt}=1$$

両辺をtについて積分すると

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int dt$$

これより

$\sin^{-1}x=t+C$（Cは任意定数）

よって，一般解は

$$x=\sin(t+C)$$

$t=0$，$x=1$を代入すると

$$1=\sin C$$

$C=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$（nは整数）

よって，求める解は

$\boldsymbol{x}=\sin\left(t+\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)$（$n$は整数）

$$=\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{=\cos t}$$

（３）（同次形）

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x^2+2tx}{t^2}$より，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x^2}{t^2}+\dfrac{2x}{t}$

よって，$\dfrac{dx}{dt}=\left(\dfrac{x}{t}\right)^2+2\cdot\dfrac{x}{t}$

$u=\dfrac{x}{t}$とおくと，$x=tu$であるから，

両辺をtで微分して

$$\frac{dx}{dt}=u+t\frac{du}{dt}$$

これを①に代入して

$$u + t\frac{du}{dt} = u^2 + 2u$$

$$t\frac{du}{dt} = u^2 + u$$

$$\frac{1}{u^2+u}\frac{du}{dt} = \frac{1}{t}$$

両辺をtで積分すると

$$\int \frac{1}{u^2+u}du = \int \frac{1}{t}dt$$

ここで，$\int \frac{1}{u^2+u}du$について，被積分関数を部分分数分解すると

$$\frac{1}{u^2+u} = \frac{1}{u(u+1)}$$

$$= \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$$ ※部分分数分解の過程は省略

よって

$$\int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du = \int \frac{1}{t}dt$$

これより

$\log|u| - \log|u+1| = \log|t| + c$（$c$は任意定数）

$$\log\left|\frac{u}{u+1}\right| - \log|t| = c$$

$$\log\left|\frac{u}{t(u+1)}\right| = c$$

$$\frac{u}{t(u+1)} = \pm e^c$$

$C = \pm e^c$とおくと

$$\frac{u}{t(u+1)} = C$$

ここで，$u = \frac{x}{t}$であるから

$$\frac{\frac{x}{t}}{t\left(\frac{x}{t}+1\right)} = C$$

$$\frac{x}{tx+t^2} = C$$

これに，$t = 1$，$x = 1$を代入すると

$$\frac{1}{1+1} = C$$

$$C = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{tx+t^2} = \frac{1}{2}$$

$$2x = tx + t^2$$

$$2x - tx = t^2$$

$$x(2-t) = t^2$$

よって，求める解は

$$\boldsymbol{x = \frac{t^2}{2-t}}$$

（４）（１階線形）

i）斉次１階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t}$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t}$$

両辺をtについて積分すると

$$\int \frac{1}{x}dx = \int -\frac{1}{t}dt$$

これより

$\log|x| = -\log|t| + c$（cは任意定数）

$$\log|x| + \log|t| = c$$

$$\log|xt| = c$$

$$xt = \pm e^c$$

$C = \pm e^c$とおくと

$$xt = C$$

$x = \frac{C}{t}$（Cは任意定数）

ii）$x = \frac{u}{t}$とおき,両辺をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\frac{1}{t} + u \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

$$= \frac{1}{t}\frac{du}{dt} - \frac{u}{t^2}$$

これを，微分方程式に代入すると

$$\frac{1}{t}\frac{du}{dt} - \frac{u}{t^2} + \frac{1}{t}\cdot\frac{u}{t} = e^t$$

$$\frac{1}{t}\frac{du}{dt} - \frac{u}{t^2} + \frac{u}{t^2} = e^t$$

$$\frac{du}{dt} = te^t$$

両辺をtについて積分すると

$$\int du = \int te^t dt$$

ここで，$\int te^t dt$ について，部分積分を用いて

$$\int te^t dt = te^t - \int (t)' e^t dt$$

$$= te^t - \int e^t dt$$

$$= te^t - e^t + c$$

よって

$\int du = \int te^t dt$ より

$u = te^t - e^t + C$（Cは任意定数）

よって，一般解は

$$x = \frac{te^t - e^t + C}{t}$$

ここで，$t = 1$，$x = 0$を代入すると

$$0 = \frac{1 \cdot e^1 - e^1 + C}{1}$$

$$C = 0$$

よって，求める解は

$$\boldsymbol{x} = \frac{te^t - e^t}{t}$$

$$= e^t - \frac{e^t}{t} = \left(\boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{t}}\right)\boldsymbol{e^t}$$

3.

$m\frac{dv}{dt} = mg - Kv$の両辺をmで割ると

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{K}{m}v$$

ここで，$\lambda = -\frac{K}{m}$とおくと

$$\frac{dv}{dt} = g + \lambda v$$

$$\frac{1}{\lambda v + g}\frac{dv}{dt} = 1$$

両辺をtで積分すると

$$\int \frac{\frac{1}{\lambda}(\lambda v + g)'}{\lambda v + g} dv = \int dt$$

$$\frac{1}{\lambda}\int \frac{(\lambda v + g)'}{\lambda v + g} dv = \int dt$$

これより

$\frac{1}{\lambda}\log|\lambda v + g| = t + c$（$c$は任意定数）

$$\log|\lambda v + g| = \lambda t + \lambda c$$

$$\lambda v + g = \pm e^{\lambda t + \lambda c}$$

$$\lambda v = \pm e^{\lambda c} e^{\lambda t} - g$$

$C = \pm e^{\lambda c}$とおくと

$$\lambda v = Ce^{\lambda t} - g$$

$$v = \frac{Ce^{\lambda t} - g}{\lambda}$$

$v(0) = 0$より，$t = 0$のとき，$v = 0$であるから

これらを代入して

$$0 = \frac{Ce^0 - g}{\lambda}$$

$$0 = C - g$$

$$C = g$$

よって

$$v = \frac{ge^{\lambda t} - g}{\lambda}$$

$$= \frac{g}{\lambda}\left(e^{\lambda t} - 1\right)$$

ここで，$\lambda = -\frac{K}{m}$であるから

$$v = \frac{g}{-\frac{K}{m}}\left(e^{-\frac{K}{m}t} - 1\right)$$

よって

$$\boldsymbol{v(t) = \frac{mg}{K}\left(1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right)}$$

（２）$\lim_{t\to\infty}\frac{mg}{K}\left(1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{mg}{K}\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{K}{m}t}}\right)$

$$= \frac{mg}{K}(1 - 0)$$

$$= \boldsymbol{\frac{mg}{K}}$$

4.

$$L\frac{di}{dt} = -Ri + E$$

$$\frac{L}{Ri - E}\frac{di}{dt} = -1$$

両辺をtについて積分すると

$$\int \frac{L}{Ri - E} di = -\int dt$$

これより

$$\frac{L}{R}\log|Ri-E|=-t+c$$（Cは任意定数）

$$\log|Ri-E|=-\frac{R}{L}t+\frac{R}{L}c$$

ここで，$\lambda=-\frac{R}{L}$とおくと

$$\log|Ri-E|=\lambda t-\lambda c$$

$$Ri-E=\pm e^{\lambda t-\lambda c}$$

$$Ri-E=\pm e^{-\lambda c}e^{\lambda t}$$

$C=\pm e^{-\lambda c}$とおくと

$$Ri-E=Ce^{\lambda t}$$

$$Ri=Ce^{\lambda t}+E$$

$$i=\frac{Ce^{\lambda t}+E}{R}$$

ここで，$t=0$，$i=0$を代入して

$$0=\frac{Ce^{0}+E}{R}$$

$$0=\frac{C}{R}+\frac{E}{R}$$

$$0=C+E$$

$$C=-E$$

よって

$$i=\frac{-Ee^{\lambda t}+E}{R}$$

$$=\frac{E}{R}\left(1-e^{\lambda t}\right)$$

ここで，$\lambda=-\frac{R}{L}$であるから

$$\boldsymbol{i=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

練習問題 1-B

1.

（１）$u=\sqrt{x+2t}$より，$u\geqq 0$

$\frac{dx}{dt}=2\sqrt{x+2t}$より，$\frac{dx}{dt}=2u$

また，両辺をtで微分すると

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+2t}}\cdot(x+2t)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+2t}}\cdot\left(\frac{dx}{dt}+2\right)$$

$$=\frac{1}{2u}\cdot(2u+2)$$

$$=\frac{1}{u}\cdot(u+1)$$

よって，$\frac{du}{dt}=\frac{1}{u}\cdot(u+1)$であるから

$$\boldsymbol{u\frac{du}{dt}=u+1}$$

（２）$u\frac{du}{dt}=u+1$

$$\frac{u}{u+1}\frac{du}{dt}=1$$

$$\frac{(u+1)-1}{u+1}\frac{du}{dt}=1$$

$$\left(1-\frac{1}{u+1}\right)\frac{du}{dt}=1$$

両辺をtについて積分すると

$$\int\left(1-\frac{1}{u+1}\right)du=\int dt$$

これより

$u-\log(u+1)=t+C$（Cは任意定数）

よって，一般解は

$\boldsymbol{\sqrt{x+2t}-\log\left(\sqrt{x+2t}+1\right)=t+C}$**（$C$は任意定数）**

2.

（１）与式の両辺をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dt}+t\frac{d^2x}{dt^2}+3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^2x}{dt^2}$$

よって

$$\frac{d^2x}{dt^2}\left\{t+3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\}=0$$

（２）

i）$\frac{d^2x}{dt^2}=0$ のとき

$\frac{dx}{dt}=C$（Cは任意定数）

よって，**一般解**は，これを与えられた微分方程式に代入して，$\boldsymbol{x=Ct+C^3}$**（Cは任意定数）**

ii）$t+3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=0$ のとき

$$t=-3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\quad\cdot\cdot\cdot ①$$

これを，与えられた微分方程式に代入して

$$x=-3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{dx}{dt}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^3$$

$$=-3\left(\frac{dx}{dt}\right)^3+\left(\frac{dx}{dt}\right)^3$$

$$=-2\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 \quad ・・・②$$

①の両辺を３乗すると

$$t^3=-27\left(\frac{dx}{dt}\right)^6$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^6=-\frac{t^3}{27} \quad ・・・①'$$

②の両辺を２乗すると

$$x^2=4\left(\frac{dx}{dt}\right)^6$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^6=\frac{x^2}{4} \quad ・・・②'$$

この式より，$-\dfrac{t^3}{27}=\dfrac{x^2}{4}$

よって，**特異解は，**$\boldsymbol{x^2=-\dfrac{4}{27}t^3}$

3.

（１）$z=x^{-2}$の両辺をtで微分すると

$$\frac{dz}{dt}=-2x^{-3}\frac{dx}{dt}$$

よって

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{x^3}{2}\frac{dz}{dt}$$

これを与えられた方程式に代入すると

$$t\left(-\frac{x^3}{2}\frac{dz}{dt}\right)-2x=t^2x^3$$

$$-t\frac{x^2}{2}\frac{dz}{dt}-2=t^2x^2$$

$x^2=z^{-1}$なので

$$-t\frac{z^{-1}}{2}\frac{dz}{dt}-2=t^2z^{-1}$$

$$\boldsymbol{t\frac{dz}{dt}+4z=-2t^2}$$

（２）zについての微分方程式を解く．

$t\dfrac{dz}{dt}+4z=-2t^2$より

$$\frac{dz}{dt}+\frac{4z}{t}=-2t$$

i）斉次１階微分方程式の解

$$\frac{dz}{dt}+\frac{4z}{t}=0$$

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dt}=-\frac{4}{t}$$

両辺をtについて積分すると

$$\int\frac{1}{z}dz=-4\int\frac{1}{t}dt$$

これより

$\log|z|=-4\log|t|+c$（cは任意定数）

$\log|z|+4\log|t|^4=c$

$\log|z|t^4=c$

よって

$|z|t^4=\pm e^c$

$zt^4=\pm e^c$

$$z=\frac{\pm e^c}{t^4}$$

$C=\pm e^c$とおくと，$z=\dfrac{C}{t^4}$（Cは任意定数）

ii）$z=\dfrac{u}{t^4}=ut^{-4}$とおき，両辺をtで微分すると

$$\frac{dz}{dt}=\frac{du}{dt}t^{-4}-4ut^{-5}$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt}t^{-4}-4ut^{-5}+\frac{4ut^{-4}}{t}=-2t$$

$$\frac{du}{dt}=-2t^5$$

両辺をtについて積分すると

$$\int du=-2\int t^5\,dt$$

これより

$u=-\dfrac{1}{3}t^6+c$（cは任意定数）

よって

$$z=ut^{-4}$$

$$=\frac{-\frac{1}{3}t^6+c}{t^4}$$

$$=\frac{-t^6+3c}{3t^4}$$

$C=3c$とおくと

$$z=\frac{-t^6+C}{3t^4}$$

$z=\dfrac{1}{x^2}$であるから

$$\frac{1}{x^2}=\frac{-t^6+C}{3t^4}$$

$\boldsymbol{x^2(C-t^6)=3t^4}$ **（$\boldsymbol{C}$は任意定数）**

4.

（１）$x=t$より，$\dfrac{dx}{dt}=1$

これを微分方程式に代入すると

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=1+(2t^2+1)t-t\cdot t^2\\&=1+2t^3+t-t^3\\&=t^3+t+1=\text{右辺}\end{aligned}$$

（２）$u=\dfrac{1}{x-t}$より，$x-t=\dfrac{1}{u}$

すなわち，$x=t+\dfrac{1}{u}$であるから

$$\frac{dx}{dt}=1-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}$$

これを，微分方程式に代入して

$$1-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}+(2t^2+1)\left(t+\frac{1}{u}\right)-t\left(t+\frac{1}{u}\right)^2=t^3+t+1$$

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}+2t^3+\frac{2t^2}{u}+t+\frac{1}{u}-t\left(t^2+\frac{2t}{u}+\frac{1}{u^2}\right)=t^3+t$$

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}+2t^3+\frac{2t^2}{u}+t+\frac{1}{u}-t^3+\frac{2t^2}{u}-\frac{t}{u^2}=t^3+t$$

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}+\frac{1}{u}-\frac{t}{u^2}=0$$

よって，$\boldsymbol{\dfrac{du}{dt}-u=-t}$

（３）$\dfrac{du}{dt}-u=-t$を解く．

i）斉次１階微分方程式の解

$$\frac{du}{dt}-u=0$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dt}=1$$

両辺をtについて積分すると

$$\int\frac{1}{u}du=\int dt$$

これより

$\log|u|=t+c$（cは任意定数）

よって

$$\begin{aligned}u&=\pm e^{t+c}\\&=\pm e^c e^t\end{aligned}$$

$C=\pm e^c$とおくと，$u=Ce^t$（Cは任意定数）

ii）$u=ve^t$とおき，両辺をtで微分すると

$$\frac{du}{dt}=\frac{dv}{dt}e^t+ve^t$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{dv}{dt}e^t+ve^t-ve^t=-t$$

$$\frac{dv}{dt}=-te^{-t}$$

両辺をtについて積分すると

$$\int dv=-\int te^{-t}dt$$

$$v=-\left(-te^{-t}+\int e^{-t}dt\right)$$ ※部分積分

$=te^{-t}+e^{-t}+C$（Cは任意定数）

よって

$$\begin{aligned}u&=ve^t\\&=(te^{-t}+e^{-t}+C)e^t\\&=t+1+Ce^t\end{aligned}$$

したがって

$$\boldsymbol{x}=t+\frac{1}{u}$$

$=\boldsymbol{t+\dfrac{1}{Ce^t+t+1}}$ **（$\boldsymbol{C}$は任意定数）**